УДК 517. 946

І. М. Конет*, д-р фіз.-мат. наук, професор,
М. П. Ленюк**, д-р фіз.-мат. наук, професор

* Кам`янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам`янець-Подільський,
** Чернівецький факультет Харківського національного технічного університету «ХПІ», м. Чернівці

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЛЕЖАНДРА — ФУР'Є — БЕССЕЛЯ НА СЕГМЕНТІ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Методом узагальненого скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Лежандра — Фур'є — Бесселя зі спектральним параметром одержано розв'язок задачі дифузії на трискладовому сегменті $\left[R_0, R_3\right]$ полярної осі в припущенні, що межі середовища м'які по відношенню до відбиття хвиль. Моделювання дифузійних процесів виконано за допомогою гібридного диференціального оператора Лежандра — Фур'є — Бесселя.

Ключові слова: *моделювання дифузійних процесів, гібридний диференціальний оператор, власні елементи, скінченне гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, головні розв'язки.*

Постановка проблеми та її аналіз. Процеси дифузії відіграють значну роль у виробничих процесах, впливають на міцність устаткування при врахуванні механічних та технологічних умов експлуатації металів і сплавів. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є диференціальне рівняння дифузії параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 u - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(t, r), \quad r \in (R_0, R_3) \tag{1}$$

з відповідними початковою та крайовими умовами.

Потреби практики приводили до різноманітного узагальнення рівняння (1). Та в усіх випадках дифузійні процеси вивчалися в припущенні, що межа середовища жорстка відносно відбиття хвиль. Різко змінюється картина дифузійного процесу, якщо межа середовища є м'якою відносно відбиття хвиль (в крайових операторах та операторах спряження присутня похідна за часовою змінною).

У другій половині XX-го століття для вивчення механіко-технічних характеристик композитних матеріалів був розвинутий метод кусковосталих фізико-технічних характеристик [2]. Це приводило в кожній конкретній задачі до інтегрування диференціальних рівнянь другого порядку (або систем таких рівнянь) із сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функцій та її похідних. Та отримати інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задач цим методом, як виявилося, неможливо, Тому ми пропонуємо моделювання дифузійних процесів методом гібридних диференціальних операторів [3—5].

Основна частина. Побудуємо обмежений в області

$$D_2 = \{(t,r): t \in (0;\infty); r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_0 > 0, R_3 < \infty\}$$

розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь дифузії параболічного типу зі сталими коефіцієнтами [1]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \Lambda_{(\mu)}[u_1] = f_1(t,r), \quad r \in (R_0, R_1),\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = f_2(t,r), \quad r \in (R_1, R_2), \qquad (2)\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 B_{\nu,\alpha}[u_3] = f_3(t,r), \quad r \in (R_2, R_3)
\end{aligned}$$

з нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$\left(L_{11}^0[u_1(t,r)]\right)\Big|_{r=R_0} = g_0(t), \left(L_{22}^3[u_3(t,r)]\right)\Big|_{r=R_3} = g_R(t) \qquad (3)$$

та умовами спряження

$$(L_{j1}^k[u_k(t,r)] - L_{j2}^k[u_{k+1}(t,r)])\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); \quad j,k = 1,2. \qquad (4)$$

У рівностях (2) беруть участь диференціальний оператор Бесселя $B_{\nu,(\alpha)} = \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r^{-1}\frac{d}{dr} - (\nu^2 - \alpha^2)r^{-2}$ [6], диференціальний оператор Лежандра $\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\mu_1^2\left(1 - chr\right)^{-1} + \mu_2^2\left(1 + chr\right)^{-1}\right)$ [7] та диференціальний оператор Фур'є $\frac{d^2}{dr^2}$ [8], де $2\alpha + 1 > 0$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1 \ge \mu_2 \ge 0$, $\nu \ge \alpha$.

У рівностях (3), (4) беруть участь диференціальні оператори

$$L_{jk}^m = (\alpha_{jk}^m + \delta_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}; j,k = 1,2; m = \overline{0,3}.$$

Розв'язок задачі (2)—(4) побудуємо методом скінченного гібридного інтегрального перетворення (СГІП) зі спектральним параметром, породженого на множині I_2 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu,\alpha}^{(\mu)} = \theta(r - R_o)\theta(R_1 - r)a_1^2\Lambda_{(\mu)} +$$
$$+\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2\frac{d^2}{dr^2} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2 B_{\nu,\alpha}, \tag{5}$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда.

Оскільки ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ самоспряжений і на множині I_2 не має особливих точок, то його спектр дійсний та дискретний [9].

Власні елементи (власні числа та відповідні їм власні функції) ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ знайдемо в результаті розв'язання спектральної задачі Штурма — Ліувілля: побудувати на множині I_2 відмінний від нуля розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Лежандра, Фур'є та Бесселя

$$\begin{gathered}(\Lambda_{(\mu)} + b_1^2)V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = 0,\ r \in (R_0, R_1),\\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + b_2^2\right)V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0,\ r \in (R_1, R_2),\\ (B_{\nu,\alpha} + b_3^2)V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0,\ r \in (R_2, R_3)\end{gathered} \tag{6}$$

з крайовими умовами

$$\begin{gathered}\left[\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0\right)V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)\right]\Bigg|_{r=R_0} = 0,\\ \left[\left(\tilde{\alpha}_{22}^3\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3\right)V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)\right]\Bigg|_{r=R_3} = 0\end{gathered} \tag{7}$$

та однорідними умовами спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k\right)V_{\nu,\alpha;k}^{(\mu)}(r,\beta) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k\right)V_{\nu,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta)\right]\Bigg|_{r=R_k} = 0; \quad j,k = 1,2. \tag{8}$$

У рівностях (6)—(8) беруть участь: спектральний параметр β, компоненти $V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ спектральної власної функції

$$V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta) = \sum_{j=1}^{3}\theta(r - R_{j-1})\theta(R_j - r)V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta) \tag{9}$$

та функції $b_j = a_j^{-1}\left(\beta^2 + k_j^2\right)^{1/2}, \left(k_j^2 \geq 0, j = \overline{1,3}\right); \tilde{\alpha}_{jk}^m = \alpha_{jk}^m - \left(\beta^2 + \gamma^2\right)\delta_{jk}^m,$

$$\tilde{\beta}_{jk}^{m} = \tilde{\beta}_{jk}^{m} - \left(\beta^2 + \gamma^2\right)\delta_{jk}^{m}, \left(\gamma^2 \geq 0; j,k = 1,2; m = \overline{0,3}\right).$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)} + b_1^2\right)v = 0$ складають функції $v_1 = A_{\nu_1^*}^{(\mu)}\left(chr\right)$ та $v_2 = B_{\nu_1^*}^{(\mu)}\left(chr\right), \nu_1^* = -\dfrac{1}{2} + ib_1$ [7]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\dfrac{d^2}{dr^2} + b_2^2\right)v = 0$ складають функції $v_1 = \cos b_2 r$ та $v_2 = \sin b_2 r$ [8]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\nu,\alpha} + b_3^2\right)v = 0$ складають функції $v_1 = J_{\nu,\alpha}\left(b_3 r\right)$ та $v_2 = N_{\nu,\alpha}\left(b_3 r\right)$ [6].

В силу лінійності задачі (6)—(8) покладемо

$$\begin{gathered}
V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = A_1 A_{\nu_1^*}^{(\mu)}\left(chr\right) + B_1 B_{\nu_1^*}^{(\mu)}\left(chr\right), r \in \left(R_0, R_1\right), \\
V_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = A_2 \cos b_2 r + B_2 \sin b_2 r, r \in \left(R_1, R_2\right), \\
V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = A_3 J_{\nu,\alpha}\left(b_3 r\right) + B_3 N_{\nu,\alpha}\left(b_3 r\right), r \in \left(R_2, R_3\right).
\end{gathered} \tag{10}$$

Крайові умови (7) та умови спряження (8) для визначення шести величин $A_j, B_j \left(j = \overline{1,3}\right)$ дають однорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$\begin{gathered}
Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu);01}\left(chR_0\right)A_1 + Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu);02}\left(chR_0\right)B_1 = 0, \\
Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);11}\left(chR_1\right)A_1 + Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);12}\left(chR_1\right)B_1 - v_{j2}^{11}\left(b_2R_1\right)A_2 - v_{j2}^{12}\left(b_2R_1\right)B_2 = 0, j = 1,2; \\
v_{j1}^{21}\left(b_2R_2\right)A_2 + v_{j1}^{22}\left(b_2R_2\right)B_2 - u_{\nu,\alpha;j2}^{21}\left(b_3R_2\right)A_3 - u_{\nu,\alpha;j2}^{22}\left(b_3R_2\right)B_3 = 0, \\
u_{\nu,\alpha;22}^{31}\left(b_3R_3\right)A_3 + u_{\nu,\alpha;22}^{32}\left(b_3R_3\right)B_3 = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Введемо до розгляду функції:

$$\delta_{\nu_1^*;j1}^{(\mu)}\left(chR_0, chR_1\right) = Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu);01}\left(chR_0\right)Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);12}\left(chR_1\right) -$$

$$-Y_{\nu_1^*;11}^{(\mu);02}\left(chR_0\right)Y_{\nu_1^*;j1}^{(\mu);11}\left(chR_1\right); j = 1,2;$$

$$\delta_{jk}\left(b_2R_1, b_2R_2\right) = v_{j2}^{11}\left(b_2R_1\right)v_{k1}^{22}\left(b_2R_2\right) - v_{j2}^{12}\left(b_2R_1\right)v_{k1}^{21}\left(b_2R_2\right); j,k = 1,2;$$

$$\delta_{\nu,\alpha;j2}\left(b_3R_2, b_3R_3\right) = u_{\nu,\alpha;j2}^{21}\left(b_3R_2\right)u_{\nu,\alpha;22}^{32}\left(b_3R_3\right) - u_{\nu,\alpha;j2}^{22}\left(b_3R_2\right)u_{\nu,\alpha;22}^{31}\left(b_3R_3\right);$$

$$a_{(\mu);j}\left(\beta\right) = \delta_{\nu_1^*;11}^{(\mu)}\left(chR_0, chR_1\right)\delta_{2j}\left(b_2R_1, b_2R_2\right) -$$

$$-\delta_{\nu_1^*;21}^{(\mu)}\left(chR_0, chR_1\right)\delta_{1j}\left(b_2R_1, b_2R_2\right);$$

$$\delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}\left(\beta\right)=a_{(\mu);1}\left(\beta\right)\delta_{\nu,\alpha;22}\left(b_3R_2,b_3R_3\right)-a_{(\mu);2}\left(\beta\right)\delta_{\nu,\alpha;12}\left(b_3R_2,b_3R_3\right).$$

Алгебраїчна система (11) має ненульовий розв'язок тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю:

$$\delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}\left(\beta\right)=0.$$

Ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$.

Підставимо в алгебраїчну систему (11) $\beta=\beta_n\left(b_j\left(\beta_n\right)\equiv b_{jn};\ \nu_{1n}^{*}=-\dfrac{1}{2}+ib_{1n}\right)$ і відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності. Покладемо $A_1=-A_0Y_{\nu_{1n}^{*};11}^{(\mu);02}\left(chR_0\right),B_1=A_0Y_{\nu_{1n}^{*};11}^{(\mu);01}\left(chR_0\right)$, де $A_0\neq0$ підлягає визначенню. Перше рівняння системи стає тотожністю. Для визначення A_2,B_2 маємо алгебраїчну систему

$$v_{j2}^{11}\left(b_{2n}R_1\right)A_2+v_{j2}^{12}\left(b_{2n}R_1\right)B_2=A_0\delta_{\nu_{1n}^{*};j1}^{(\mu)}\left(chR_{0,}chR_1\right),\ j=1,2.$$

Звідси знаходимо, що

$$A_2=\frac{A_0}{c_{21,1}b_{2n}}\left[\delta_{\nu_{1n}^{*};11}^{(\mu)}\left(chR_{0,}chR_1\right)v_{22}^{12}\left(b_{2n}R_1\right)-\delta_{\nu_{1n}^{*};21}^{(\mu)}\left(chR_{0,}chR_1\right)v_{12}^{12}\left(b_{2n}R_1\right)\right],$$
$$B_2=\frac{A_0}{c_{21,1}b_{2n}}\left[\delta_{\nu_{1n}^{*};21}^{(\mu)}\left(chR_{0,}chR_1\right)v_{12}^{11}\left(b_{2n}R_1\right)-\delta_{\nu_{1n}^{*};11}^{(\mu)}\left(chR_{0,}chR_1\right)v_{22}^{11}\left(b_{2n}R_1\right)\right].\tag{13}$$

Для обчислення величин A_3,B_3 отримаємо алгебраїчну систему

$$u_{\nu,\alpha;j2}^{21}\left(b_{3n}R_2\right)A_3+u_{\nu,\alpha;j2}^{22}\left(b_{3n}R_2\right)B_3=\frac{-A_0}{c_{21,1}b_{2n}}\cdot a_{(\mu);j}\left(\beta_n\right),\ j=1,2.$$

Звідси знаходимо, що

$$A_0=c_{21,1}b_{2n}\frac{2}{\pi}\frac{c_{21,2}}{b_{3n}^{2\alpha}R_2^{2\alpha+1}},A_3=-\omega_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}\left(\beta_n\right);B_3=\omega_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}\left(\beta_n\right),$$
$$\omega_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta_n)=a_{(\mu);1}(\beta_n)u_{\nu,\alpha;22}^{2j}(b_{3n}R_2)-a_{(\mu);2}(\beta_n)u_{\nu,\alpha;12}^{2j}(b_{3n}R_2).\tag{14}$$

Одержані згідно формул (13) та (14) значення величин $A_j,B_j\,(j=\overline{1,3})$ підставимо у формули (10). Отримаємо функції:

$$V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)=c_{21,1}b_{2n}\frac{2}{\pi}\frac{c_{21,2}}{b_{3n}^{2\alpha}R_2^{2\alpha+1}}\times$$
$$\times\left[Y_{\nu_1^{*};11}^{(\mu);01}\left(chR_0\right)B_{\nu_{1n}^{*}}^{(\mu)}(chr)-Y_{\nu_1^{*};11}^{(\mu);02}\left(chR_0\right)A_{\nu_{1n}^{*}}^{(\mu)}(chr)\right],$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(r,\beta_n)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{21,2}}{b^{2\alpha}_{3n}R^{2\alpha+1}_2}\Big[\delta^{(\mu)}_{\nu^*_{1n};11}\left(chR_{0,}chR_1\right)\varphi^1_{22}\left(b_{2n}R_1;b_{2n}r\right)-$$
$$-\delta^{(\mu)}_{\nu^*_{1n};21}\left(chR_{0,}chR_1\right)\varphi^1_{12}\left(b_{2n}R_1;b_{2n}r\right)\Big], \qquad (15)$$

$$\varphi^1_{j2}\left(b_{2n}R_1;b_{2n}R_2\right)=v^{12}_{j2}\left(b_{2n}R_1\right)\cos\left(b_{2n}r\right)-v^{11}_{j2}\left(b_{2n}R_1\right)\sin\left(b_{2n}r\right);\, j=1,2;$$

$$V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;3}(r,\beta_n)=\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}\left(\beta_n\right)N_{\nu,\alpha}\left(b_{3n}r\right)-\omega^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}\left(\beta_n\right)J_{\nu,\alpha}\left(b_{3n}r\right).$$

Згідно рівності (9) спектральна вектор функція $V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)$ визначена.

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти:

$$\alpha^0_{11}\le 0,\beta^0_{11}\ge 0,\left|\alpha^0_{11}\right|+\beta^0_{11}\ne 0;\alpha^3_{22}\ge 0,\beta^3_{22}\ge 0,\alpha^3_{22}+\beta^3_{22}\ne 0;$$

$$\alpha^k_{jm}\ge 0,\delta^k_{jm}\ge 0,\beta^k_{jm}\ge 0,\gamma^k_{jm}\ge 0,c_{11,k}\cdot c_{21,k}>0,c_{j1,k}=\alpha^k_{2j}\beta^k_{1j}-\alpha^k_{1j}\beta^k_{2j};$$

$$c_{j2,k}=\delta^k_{2j}\gamma^k_{1j}-\delta^k_{1j}\gamma^k_{2j}=0;\delta^k_{2j}\beta^k_{1j}-\delta^k_{1j}\beta^k_{2j}=\alpha^k_{2j}\gamma^k_{1j}-\alpha^k_{1j}\gamma^k_{2j}.$$

Визначимо числа

$$a^2_1\sigma_1=\frac{c_{11,1}c_{11,2}R^{2\alpha+1}_2}{c_{21,1}c_{21,2}shR_1},a^2_2\sigma_2=\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R^{2\alpha+1}_2,a^2_3\sigma_3=1,$$

вагову функцію

$$\sigma\left(r\right)=\theta\left(r-R_0\right)\theta\left(R_1-r\right)\sigma_1 shr+$$
$$+\theta\left(r-R_1\right)\theta\left(R_2-r\right)\sigma_2+\theta\left(r-R_2\right)\theta\left(R_3-r\right)a_3r^{2\alpha+1} \qquad (16)$$

та квадрат норми власної вектор-функції $\left[10\right]$

$$\left\|V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)\right\|^2_1=\int\limits_{R_0}^{R_3}\left[V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)\right]^2\sigma\left(r\right)dr+G_2\left(\beta_{n,}\beta_n\right). \qquad (17).$$

Згідно з роботою [10] маємо такі твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}\left(\beta\right)=0$ складають дискретний спектр ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,\alpha}$: дійсні, різні, симетрично розташовані відносно точки $\beta=0$ й на півосі $\beta>0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta=\infty$.

Теорема 2 (про спектральну функцію). Система $\left\{V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)\right\}^{\infty}_{n=1}$ власних вектор-функцій узагальнено ортогональна з ваговою функцією $\sigma\left(r\right)$ на множині I_2, повна й замкнена.

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь яка вектор-функція $g(r)=\{g_1(r),g_2(r),g_3(r)\}\in G$ (область визначення ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$) зображається за системою $\left\{V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3} g(\rho)V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)\,d\rho\,\frac{V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\left\|V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\|_1^2}. \tag{18}$$

Перейдемо до узагальнено ортонормованої системи власних вектор-функцій

$$\left\{v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}=\left\{V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\|_1^1\right)^{-1}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Одержимо ряд Фур'є (18) в такій формі:

$$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3} g(\rho)v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)\,d\rho\, v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n). \tag{19}$$

Ряд Фур'є (19) визначає пряме $H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ та обернене $H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення зі спектральним параметром, породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}\left[g(r)\right]=\int_{R_0}^{R_3} g(r)v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma(r)\,dr\equiv\tilde{g}_n, \tag{20}$$

$$H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}\left[\tilde{g}(r)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_n v_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\equiv g(r). \tag{21}$$

Визначимо величини та функції:

$$d_1=a_1^2\sigma_1 shR_1 : c_{11,1},\, d_2=a_2^2\sigma_2 : c_{11,2},\, \tilde{g}_{1n}=\int_{R_0}^{R_1} g_1(r)v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 shr\,dr,$$

$$\tilde{g}_{2n}=\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2\,dr,\, \tilde{g}_{3n}=\int_{R_2}^{R_3} g_3(r)v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha+1}\,dr,$$

$$Z_{\nu,\alpha;i2}^{(\mu),k}(\beta_n)=\left(\tilde{\alpha}_{i2}^k\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{i2}^k\right)v_{\nu,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k};\, i,k=1,2.$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r)=\left\{\Lambda_{(\mu)}\left[g_1(r)\right];g_2''(r);B_{\nu,\alpha}\left[g_3(r)\right]\right\}$ неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^{0}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{11}^{0}\right)g_1(r)\Big|_{r=R_0}=g_0,\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{22}^{3}\right)g_3(r)\Big|_{r=R_3}=g_R \quad (22)$$

та умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j1}^{k}\right)g_k(r)-\left(\tilde{\alpha}_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j2}^{k}\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk};j,k=1,2, \quad (23)$$

то справджується основна тотожність скінченного гібридного інтегрального перетворення ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$:

$$\begin{gathered}H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}\left[M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}g(r)\right]=-\beta_n^2\tilde{g}_n-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_{in}+\\+\left(-\tilde{\alpha}_{11}^{0}\right)^{-1}v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)a_1^2\sigma_1 shR_0g_0+\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\right)^{-1}v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)R_3^2g_R+\\+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k}-Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}\right].\end{gathered} \quad (24)$$

Правила (20), (21) та (24) складають математичний апарат для одержання інтегрального зображення точного аналітичного розв'язку задачі дифузії (2)—(4).

Запишемо систему (2) й нульові початкові умови у матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_1^2-a_1^2\Lambda_{(\mu)}\right)u_1(t,r)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_2^2-a_2^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_2(t,r)\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_3^2-a_3^2B_{\nu,\alpha}\right)u_3(t,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}. \quad (25)$$

Інтегральний оператор $H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ згідно правила (20) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$\begin{gathered}H_{\nu,\alpha}^{(\mu)}[\ldots]=\left[\int_{R_0}^{R_1}\ldots v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_1 shrdr\int_{R_1}^{R_2}\ldots v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_2 dr\right.\\ \left.\int_{R_2}^{R_3}\ldots v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha+1}dr\right].\end{gathered} \quad (26)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (26) за правилом множення матриць до задачі (25). Внаслідок основної тотожності (24) отримаємо задачу Коші:

$$\frac{d\tilde{u}_n}{dt} + \omega_n^2 \tilde{u}_n = \tilde{F}_n(t); \tilde{u}_n(t)\Big|_{t=0} = 0. \quad (27)$$

У рівностях (27) прийняті позначення:

$$q^2 = \max\left\{\gamma_1^2; \gamma_2^2; \gamma_3^2\right\}, \omega_n^2 = \beta_n^2 + q^2; \tilde{F}_n(t) =$$

$$= \left(-\tilde{\alpha}_{11}^0\right)^{-1} v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(R_0, \beta_n) a_1^2 \sigma_1 shR_0 g_0 + \left(\tilde{\alpha}_{22}^3\right)^{-1} v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3, \beta_n) R_3^{2\alpha+1} g_R(t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k \left[Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k}(t) - Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k}(t)\right].$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі Коші (27) є функція

$$\tilde{u}_n(t) = \int_o^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)} \tilde{F}_n(\tau) d\tau. \quad (28)$$

Оператор $H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}$ згідно правила (21) як обернений до (26) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{\nu,\alpha}^{-(\mu)}[\ldots] = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \ldots v_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r, \beta_n) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ldots v_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(r, \beta_n) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ldots v_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(r, \beta_n) \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (29) за правилом множення матриць до матриці-елемента $\left[\tilde{u}_n(t)\right]$, де функція $\tilde{u}_n(t)$ визначена формулою (28). У результаті низки елементарних перетворень одержуємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку задачі дифузії (2)—(4):

$$u_j(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t) v_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r, \beta_n) = \sum_{k=1}^{3} \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} \mathcal{H}_{\nu,\alpha;jk}^{(\mu)}(t-\tau, r, \rho) f_k(\tau, \rho) \times$$

$$\times \sigma_k \varphi_k(\rho) d\rho d\tau + \int_0^t \left[W_{\nu,\alpha;1j}^{(\mu)}(t-\tau, r) g_0(\tau) + W_{\nu,\alpha;3j}^{(\mu)}(t-\tau, r) g_R(\tau) \right] d\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k \int_0^t \left[\mathcal{R}_{\nu,\alpha;12}^{(\mu);jk}(t-\tau, r)\omega_{2k}(\tau) - \mathcal{R}_{\nu,\alpha;22}^{(\mu);jk}(t-\tau, r)\omega_{1k}(\tau) \right] d\tau, \ j = \overline{1,3}$$

$$\left(\varphi_1\left(\rho\right)=sh\rho,\varphi_2\left(\rho\right)=1,\varphi_3\left(\rho\right)=\rho^{2\alpha+1}\right). \qquad (30)$$

У формулі (30) беруть участь головні розв'язки задачі (2)—(4):

1) породжені неоднорідністю системи (2) функції впливу

$$\mathcal{H}^{(\mu)}_{\nu,\alpha;jk}\left(t,r,\rho\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\omega_n^2 t}v^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}(r,\beta_n)v^{(\mu)}_{\nu,\alpha;k}(\rho,\beta_n);\, j,k=\overline{1,3}, \qquad (31)$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1j}\left(t,r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\omega_n^2 t}\left(-\tilde{\alpha}^0_{11}\right)^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(R_0,\beta_n)v^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}\times$$
$$\times(r,\beta_n)(a_1^2\sigma_1 shR_0);\, j=\overline{1,3}, \qquad (32)$$

3) породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{\nu,\alpha;3j}\left(t,r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\omega_n^2 t}\left(\tilde{\alpha}^3_{22}\right)^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,\alpha;3}(R_3,\beta_n)v^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}(r,\beta_n)R_3^{2\alpha+1};\, j=\overline{1,3}, \qquad (33)$$

4) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$\mathcal{R}^{(\mu);jk}_{\nu,(\alpha);i2}\left(t,r\right)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\omega_n^2 t}Z^{(\mu),k}_{\nu,\alpha;i2}(\beta_n)v^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}(r,\beta_n);i,k=1,2;\, j=\overline{1,3}. \qquad (34)$$

Зауваження 1. Якщо початкові умови ненульові, тобто

$$u_j\left(t,r\right)\Big|_{t=0}=g_j(r), r\in\left(R_{j-1},R_j\right), j=\overline{1,3}, \qquad (35)$$

то переходимо до нових функцій $v_j(t,r)=u_j(t,r)-g_j(r)$, для яких

$$v_j\left(t,r\right)\Big|_{t=0}=u_j\left(t,r\right)\Big|_{t=0}-g_j(r)=g_j(r)-g_j(r)=0.$$

Зауваження 2. При $\sigma^m_{jk}=0$ та $\gamma^m_{jk}=0\left(m=\overline{1,3};\, j,k=1,2\right)$ маємо класичну задачу дифузії на спряження, коли межі жорсткі по відношенню до відбиття дифузійних хвиль.

Зауваження 3. Нехай початкові умови $u\big|_{t=0}=g_j(r)\neq 0.$ Ефектом того, що межа м'яка по відношенню до відбиття хвиль дифузії, є поява в розв'язку (30) доданків

$$\theta^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}\left(t,r\right)=W^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1j}\left(t,r\right)\psi^0_{11}+^{(\mu)}_{\nu,\alpha;3j}\left(t,r\right)\psi^3_{22}+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[\mathcal{R}^{(\mu);jk}_{\nu,\alpha;12}\left(t,r\right)\psi_{2k}-\mathcal{R}^{(\mu);jk}_{\nu,\alpha;22}\left(t,r\right)\psi_{1k}\right].$$

У цій рівності беруть участь величини:

$$\psi^0_{11}=\delta^0_{11}g_1'\left(R_0\right)+\gamma^0_{11}g_1\left(R_0\right),\psi^3_{22}=\delta^3_{22}g_3'\left(R_3\right)+\gamma^3_{22}g_3\left(R_3\right);$$
$$\psi_{jk}=\left[\delta^k_{j1}g_k'\left(R_k\right)+\gamma^k_{j1}g_k\left(R_k\right)-\left(\delta^k_{j2}g_{k+1}'\left(R_k\right)+\gamma^k_{j2}g_{k+1}\left(R_k\right)\right)\right];\, j,k=1,2.$$

Зауваження 4. Якщо покласти $g_j(r)-(a_j+b_j)\equiv\overline{g}_j(r), \left(j=\overline{1,3}\right)$ й знайти коефіцієнти із системи алгебраїчних рівнянь

$$\left(\delta_{11}^0+\gamma_{11}^0 R_0\right)a_1+\gamma_{11}^0 b_1=0,$$

$$\left(\delta_{j1}^k+\gamma_{j1}^k R_k\right)a_k+\gamma_{j1}^k b_j-\left[\left(\delta_{j2}^k+\gamma_{j2}^k R_k\right)a_{k+1}+\gamma_{j2}^k b_{k+1}\right]=\psi_{jk};\, j,k=1,2;$$

$$\left(\delta_{23}^3+\gamma_{23}^3 R_3\right)a_3+\gamma_{22}^3 b_3=0, \qquad (36)$$

то величина ефекту $\theta_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}\left(t,r\right)=0.$

Зауважимо, що при виконанні умов на коефіцієнти, які беруть участь у формулюванні задачі (2)—(4), алгебраїчна система (36) має єдиний розв’язок. Його можна одержати за правилами Крамера.

Зауваження 5. Якщо $q^2=\gamma_1^2>0$, то $k_1^2=0, k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\geq 0$, $k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\geq 0$; якщо $q^2=\gamma_2^2>0$, то $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\geq 0, k_2^2=0$, $k_3^2=\gamma_2^2-$ $-\gamma_3^2\geq 0$; якщо $q^2=\gamma_3^2>0$, то $k_1^2=\gamma_3^2-\gamma_1^2\geq 0, k_2^2=\gamma_3^2-\gamma_2^2\geq 0$, $k_3^2=0$.

Висновки. Одержані розв’язки поліпараметричні. Це дозволяє вибором параметрів виділяти безпосередньо із загальних структур будь-який практично важливий частковий випадок (у рамках розглянутої моделі). Розв’язок (30) дифузійної задачі (2)—(4) носить алгоритмічний характер. Це дає можливість застосувати його як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці числових розрахунків.

Список використаних джерел:

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
2. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
3. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м’якими межами методом гібридного диференціального оператора Лежандра — Фур’є — Фур’є на сегменті $\left[R_0;R_3\right]$ полярної осі / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Вісник Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія: Фізико-математичні науки. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Поділ. нац. ун-т, 2008. — Вип. 1. — С. 126–133.
4. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м’якими межами методом гібридного диференціального оператора Лежандра — Фур’є — Лежандра на полярній осі $r\geq R_0>0$ / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 119–136.
5. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м’якими межами методом гібридного диференціального опера-

тора Бесселя — Лежандра — Фур'є на сегменті полярній осі / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2010. — Вип. 5. — С. 112–123.

6. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 62 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83-3).
7. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера — Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.
8. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
9. Ленюк М.П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра) / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
10. Ленюк М. П. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження / М. П. Ленюк, В. В. Мороз // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. — Чернівці : Рута, 2006. — Вип. 314–315. — С. 105–113.

Generalized method of finite hybrid integral transformation of Legendre — Fourier — Bessel with spectral parameter obtained solution of the problem of diffusion in three-segment $[R_0, R_3]$ polar axis under the assumption that the limits of the medium soft with respect to reflection of waves. Simulation of diffusion processes is made using hybrid Legendre differential operator — Fourier — Bessel.

Key words: *modeling of diffusion processes, hybrid differential operator, own elements, finite hybrid integral transformation, the basic identity, the main solutions.*

Отримано: 05.03.2012